Εισαγωγή στην Τοπολογία
Διδάσκων: Νικολιδάκης Ελευθέριος

Ιανουάριος 2018

ΘΕΜΑ 1 (2 μ)

i) Δίνεται μετρικός χώρος (E,ρ) και υποσύνολο A του E. Για τυχαίο $x \in E$, δώστε τον ορισμό της απόστασης του σημείου x από το A, $\rho(x,A)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x,y \in E$ ισχύει η εξής ανισότητα: $\rho(x,A) \le \rho(x,y) + \rho(y,A)$.

ii) Δίνεται μετρικός χώρος (E,ρ) και $a \in E$. Αποδείξτε ότι το $A = \{a\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του E.

iii) Έστω μετρικός χώρος (E,ρ) και $a_1, a_2, ..., a_n \in E$, όπου $n \in N$. Δείξτε ότι το $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του E.

ΘΕΜΑ 2 (2,5 μ)

i) Δώστε τον ορισμό ενός πλήρους μ.χ. (E,ρ), και ενός πλήρους υποσυνόλου S ενός μετρικού χώρου (E,ρ).

ii) Εξετάστε ως προς την πληρότητα τα παρακάτω υποσύνολα του $(R,|\cdot|)$:
a) $A = [1,2]$, **b)** $B = [2,3)$, **c)** $C = N$, **d)** $D = Q$. Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

iii) Βρείτε ένα πλήρες υποσύνολο του $(R,|\cdot|)$ το οποίο δεν είναι ολικά φραγμένο. Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

iv) Δίνεται το υποσύνολο $A = (0,1] \cup [2,3)$ του $(R,|\cdot|)$. Βρείτε τα σύνολα $\overline{A}, A', A^{\circ}$, δίνοντας πλήρη απόδειξη.

ΘΕΜΑ 3 (2,5μ)

i) Έστω (E,ρ) μετρικός χώρος $D \subseteq E$. Διατυπώστε πότε το D θα λέγεται πυκνό υποσύνολο του E.

ii) Δίνεται (E,ρ) μετρικός χώρος $D \subseteq E$ και $a \in E$. Αποδείξτε ότι $a \in \overline{D}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n\in N}$, ώστε $a_n \in D$ για κάθε $n \in N$ και $a_n \to a$.

iii) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:(E_1,\rho_1) \to (E_2,\rho_2)$, η οποία είναι επί και $D \subseteq E_1$, το οποίο είναι πυκνό στον E_1. Δείξτε ότι η εικόνα $f(D)$ είναι πυκνό υποσύνολο του E_2.

ΘΕΜΑ 4 (2,5 μ)

i) Δώστε τον ορισμό ενός συμπαγούς μετρικού χώρου (E,ρ). Διατυπώστε επίσης πότε ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (E,ρ) θα λέγεται συμπαγές.

ii) Έστω (E,ρ) μετρικός χώρος και $(x_n)_{n\in N}$ ακολουθία του ώστε $x_n \to a$, όπου $a \in E$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in N\} \cup \{a\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του E.

iii) Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο S ενος μετρικού χώρου (E,ρ) είναι κλειστό και φραγμένο. Δείξτε επίσης ότι η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει πάντα

.ΘΕΜΑ 5 (1,2 μ)

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:(E_1,\rho_1) \to (E_2,\rho_2)$, η οποία είναι επί. Έστω ακόμη ότι ο (E_1,ρ_1) είναι συνεκτικός. Δείξτε ότι ο (E_2,ρ_2) είναι συνεκτικός.